ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HUỆ

MỘT SỐ LIÊN HỆ CỦA SỐ CÂN BẰNG VÀ SỐ ĐỐI CÂN BẰNG VỚI SỐ PELL VÀ SỐ PELL LIÊN KẾT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HUỆ

MỘT SỐ LIÊN HỆ CỦA SỐ CÂN BẰNG VÀ SỐ ĐỐI CÂN BẰNG VỚI SỐ PELL VÀ SỐ PELL LIÊN KẾT

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách kí hiệu

B_n	số cân bằng thứ n
R_n	hệ số cân bằng thứ n
b_n	số đối cân bằng thứ n
r_n	hệ số đối cân bằng thứ n
C_n	số Lucas-cân bằng thứ n
c_n	số Lucas-đối cân bằng thứ n
P_n	số Pell thứ n
Q_n	số Pell liên kết thứ n
α_1	số vô tỷ $1+\sqrt{2}$
α_2	số vô tỷ $1-\sqrt{2}$

Lời mở đầu

Từ xa xưa, nghiên cứu về các con số luôn là nguồn cảm hứng bất tận đối với các nhà toán học. Đã có rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu các số tam giác, tức là các số tự nhiên có dạng

$$1 + 2 + \cdots + n,$$

với n là một số tự nhiên nào đó. Khi nghiên cứu về phương trình Diophant

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r),$$

Behera và Panda [2] đã phát hiện ra mối liên hệ giữa số n trong nghiệm (n, r) với những số tam giác chính phương. Họ đã gọi n là *số cân bằng* và r là *hệ số cân bằng* tương ứng. Đồng thời, họ cũng tìm ra được rất nhiều tính chất đẹp và thú vị của số cân bằng. Một trong số các tính chất đó là nếu B là một số cân bằng thì $8B^2 + 1$ là một số chính phương và ngược lại. Số $C = \sqrt{8B^2 + 1}$, với B là số cân bằng, được gọi là *số Lucas-cân bằng*.

Panda và Ray [4] đã nghiên cứu một phương trình Diophant khác

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r).$$

Với nghiệm (n, r) của phương trình này, họ gọi n là *số đối cân bằng* và r là *hệ số đối cân bằng* tương ứng. Trong nghiên cứu này, Panda và Ray đã tìm ra nhiều mối liên hệ chặt chẽ giữa các số cân bằng với các số đối cân bằng, giữa các số đối cân bằng với các số chính phương. Đặc biệt, nếu b là một số đối cân bằng thì $8b^2 + 8b + 1$ là một số chính phương và ngược lại. Số $c = \sqrt{8b^2 + 8b + 1}$, với b là một số đối cân bằng, được gọi là số *Lucas-đối cân bằng*. Một số tính chất thú vị nói trên về các số cân bằng và các số đối cân bằng đã được Hoàng Thị Hường [1] trình bày lại bằng tiếng Việt.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại kết quả rất gần đây của Panda và Ray [5] về một số mối liên hệ giữa các số cân bằng, các số đối cân bằng với các số Pell và các số Pell liên kết. Đặc biệt, sự liên hệ của các loại số này còn được thể hiện qua nghiệm của một số phương trình Diophant thú vị. Các mối liên hệ này được tìm ra dựa trên công thức Binet đối với các loại số này.

Cấu trúc luận văn

Luận văn được trình bày thành ba chương

• **Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị**. Trong chương đầu tiên này, chúng tôi trình bày sơ lược về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất; về khái niệm các số cân bằng, số đối cân bằng, số Pell, số Pell liên kết, số Lucas-cân bằng và số Lucas-đối cân bằng.

• **Chương 2: Một số liên hệ quan trọng**. Trong chương này, chúng tôi trình bày các tính chất thể hiện mối liên hệ chặt chẽ giữa các loại số nói trên. Chúng tôi đã phân loại các tính chất này và trình bày thành ba mục khác nhau: một số mối liên hệ liên quan đến các tổng riêng và phân tích thành tích; một số mối liên hệ có liên quan đến các số Lucas-cân bằng và các số Lucas-đối cân bằng; một số mối liên hệ liên quan đến các hàm số học như trung bình cộng, ước chung lớn nhất, hàm phần nguyên.

• **Chương 3: Nghiệm của một số phương trình Diophant**. Chương cuối cùng này chúng tôi trình bày các kết quả của Panda và Ray về nghiệm của bốn loại phương trình Diophant đặc biệt được biểu diễn hoàn toàn thông qua các loại số đã trình bày ở các chương trước.

Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy hướng dẫn TS. Ngô Văn Định trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, tiến sĩ đang công tác tại Viện toán học, Trường Đại học khoa học tự nhiên, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, trường Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức để nâng cao trình độ của mình. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới tất cả các thầy, cô.

Tác giả xin chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè và gia đình đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, 2016

Nguyễn Thị Huệ

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương đầu tiên này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức được sử dụng trong nội dung chính của luận văn. Cụ thể, chúng tôi nhắc lại sơ lược về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất; nhắc lại về khái niệm các số Pell, số Pell liên kết, số cân bằng và số đối cân bằng. Ngoài ra, chúng tôi nhắc lại một vài tính chất của số cân bằng và số đối cân bằng. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [1], [2] và [4].

1.1 Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại khái niệm về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất và đặc biệt chúng tôi trình bày về công thức nghiệm của phương trình này trong trường hợp đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt. Đây là những kiến thức cần thiết cho các nội dung sau.

Định nghĩa 1.1.1. Phương trình có dạng

$$u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n, n = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

trong đó A, B là các hằng số, được gọi là *phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất*.

Để tìm nghiệm của phương trình sai phân (1.1), chúng ta xét phương trình bậc hai

$$\alpha^2 - A\alpha - B = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình bậc hai này được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình sai phân (1.1). Định lý sau đây cho chúng ta công thức nghiệm của phương trình sai phân (1.1) trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt.

Định lý 1.1.2 ([3, Theorem 10.1])**.** *Giả sử phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt α_1 và α_2. Khi đó phương trình sai phân (1.1) có nghiệm là*

$$u_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n, n = 1, 2, ..., \tag{1.3}$$

trong đó C_1 và C_2 là những số bất kì.

Chúng ta cũng cần chú ý rằng, nếu biết điều kiện ban đầu u_0 và u_1 thì các hằng số C_1 và C_2 hoàn toàn được xác định. Khi đó, dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$u_n = \frac{a\alpha_1^{n-1} - b\alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{1.4}$$

trong đó α_1, α_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng (1.2) và $a = u_2 - u_1\alpha_2, b = u_2 - u_1\alpha_1$.

Ví dụ 1.1.3. Ta sẽ xét ở đây một ví dụ rất quen thuộc về dãy số Fibonacci $\{F_n\}$ được xác định bởi phương trình sai phân

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1.5}$$

với điều kiện ban đầu $F_1 = 1, F_2 = 1$.

Phương trình đặc trưng của phương trình (1.5) là

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1.5) là

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 1, ...$$

Từ điều kiện ban đầu $F_1 = 1, F_2 = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci là

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right], n = 1, 2, ...$$

1.2 Số Pell và số Pell liên kết

Với $n = 1, 2, \dots,$ *số Pell* P_n và *số Pell liên kết* Q_n lần lượt được xác định bởi

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2, \quad P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, n = 2, 3, ... \tag{1.6}$$

và

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 3, \quad Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}, n = 2, 3, ... \tag{1.7}$$

Như vậy số Pell và số Pell liên kết được xác định bởi cùng một phương trình sai phân nhưng với các điều kiện ban đầu khác nhau. Phương trình đặc trưng của phương trình sai phân xác định hai dãy số này là

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt là

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ và } \alpha_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Áp dụng công thức nghiệm (1.4) ta thu được

$$P_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{2\sqrt{2}}, \quad Q_n = \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2}. \tag{1.8}$$

Các công thức này được gọi là *công thức Binet* cho dãy số Pell và dãy số Pell liên kết.